5. Analytische meetkunde

5.1. Herhaling

5.1.1. Evenwijdige rechten

Neem een nieuw venster in Wiris en teken de volgende rechten met hun namen.

$$a \leftrightarrow y = 2x$$
$$b \leftrightarrow y = x + 3$$
$$c \leftrightarrow y = 2x - 3$$

```
a:=y=2x
b:=y=x+3
c:=y=2x-3
plot({a,b,c},{toon_naam=waar})
```

Welke rechten zijn evenwijdig?

....

Waaraan kan je dit zien in het functievoorschrift? (kijk naar de rico)

....

Elke rechte die evenwijdig loopt met de rechte $f(x) = mx$, heeft een vergelijking van de vorm $f(x) = mx + q$.
Hierbij noemen we m de richtingscoëfficiënt.
Rechten met dezelfde richtingscoëfficiënten zijn evenwijdig.

Geef nog 2 rechten die evenwijdig zijn met $d \leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - 5$.

....

....

5.1.2. Voorwaarde dat een punt op een rechte ligt

Een punt behoort tot een rechte als de coördinaat van dat punt voldoet aan de vergelijking van deze rechte.

$$d \leftrightarrow ax + by + c = 0$$

$$P(x_1, y_1) \in d \Leftrightarrow ax_1 + by_1 + c = 0$$

Geef de vergelijking $d \leftrightarrow 2x - 3y - 3$ in.
We definiëren de 2 punten definiëren in Wiris. Typ het volgende:

```
d:=2x−3y−3=0
P:=punt(3,1)
Q:=punt(4,3)
```

Het enige wat we nu moeten doen, is vragen of die punten op die rechte liggen. Typ het volgende: (vergeet niet om een spatie tussen d en het vraagteken te zetten)

```
Q:=punt(4,3)
P∈d ?
Q∈d ?
```

Voer uit.

5.1.3. Afstand tussen 2 punten berekenen

Als $co(P) = (x_1, y_1)$ en $co(Q) = (x_2, y_2)$
dan is:

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)}$$

Neem een nieuw blad in Wiris en voeg volgende twee punten in: $A(0,2); B(4,-1)$
Typ "afstand(A,B)" in Wiris in en voer uit.

```
A:=punt(0,2)
B:=punt(4,−1)
afstand(A,B)
```

5.1.4. Opstellen van de vergelijking van een rechte als één punt (x_1, y_1) en de rico (m) gegeven zijn.

> De vergelijking van een rechte door (x_1, y_1) en d met richtingscoëfficiënt is:
> $y - y_1 = m.(x - x_1)$

We zoeken een rechte die evenwijdig is met de rechte $y = -\frac{1}{2}x$ (zelfde richtingscoëfficiënt) en die door het punt $(1,2)$ gaat.

- Typ in Wiris de rechte $a \leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$ en het punt P$(1,2)$.

```
a:=y=-1/2 x
P:=punt(1,2)
```

- Klik vervolgens in het menu meetkunde op 

- Het volgende verschijnt in je venster:

```
evenwijdige(rechte,punt)
```

- Vul de rechte en het punt in en voer uit.

```
a:=y=-1/2 x
P:=punt(1,2)
evenwijdige(a,P)
```

We tekenen de rechte en het punt P.

- Definieer de gevonden rechte als rechte b

- Teken de rechte b en controleer of de rechte rico $m = -\frac{1}{2}$ heeft en door het punt $(1,2)$ gaat.

```
a:=y=-1/2 x
P:=punt(1,2)
b:=evenwijdige(a,P)
b
plot({b,P})
```

5.1.5. Opstellen van de vergelijking van een rechte als twee verschillende punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) gegeven zijn

De vergelijking van een rechte door (x_1, y_1) en (x_1, y_1) met $x_1 \neq x_2$ is:

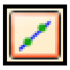
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1)$$

Hierbij is $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ de richtingscoëfficiënt.

- Geef de 2 punten in Wiris in.

```
A:=punt(1,2)
B:=punt(-2,3)
```

-

- Klik in het menu meetkunde op het icoontje 

- Het volgende verschijnt op je scherm:

```
rechte(punt,punt)
```

- Vul alles correct in en voer uit.

```
A:=punt(1,2)
B:=punt(-2,3)
rechte(A,B)
```

We tekenen de rechte.

- Definieer de gevonden rechte als rechte a en teken ze samen met de punten A en B.

```
A:=punt(1,2)
B:=punt(-2,3)
a:=rechte(A,B)
a
plot({a,A,B},{toon_naam=waar})
```

5.2. Loodrechte stand van rechten

5.2.1. Voorwaarde voor loodrechte stand van twee rechten

Neem een nieuw venster in Wiris en teken de volgende rechten met hun namen:

$$a \leftrightarrow y = 2x - 3$$

$$b \leftrightarrow y = -x + 2$$

$$c \leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

$$d \leftrightarrow y = x + 7$$

Welke rechten staan loodrecht op elkaar?

....

Vind je een verband tussen de loodrechte rechten? (kijk naar de rico)

....

....

In Wiris kun je vragen om de richtingscoëfficiënt te geven. Hiervoor gebruiken we het commando “rico”.

```
a:=y=2x-3
b:=y=-x+2
c:=y=-(1/2)x
d:=y=x+7
plot({a,b,c,d},{toon_naam=waar})

rico(a)
rico(b)
rico(c)
rico(d)
```

We gaan nu de richtingscoëfficiënten van de 2 rechten die loodrecht op elkaar staan met elkaar vermenigvuldigen.

```
rico(a)·rico(c)
rico(b)·rico(d)
```

Wat merk je?

....

....

Twee rechten, niet evenwijdig met één van de assen, staan loodrecht op elkaar als en slechts als het product van hun richtingscoëfficiënten gelijk is aan –1.

$$m \leftrightarrow y = ax + b \qquad\qquad m \perp n \Leftrightarrow m.n = -1$$
$$n \leftrightarrow y = cx + d$$

Geef 2 rechten die loodrecht staan op $f(x) = 3x$. Controleer met Wiris.

....

....

....

5.2.2. Loodlijn door een punt op een rechte

<u>Gegeven</u>:

$a \leftrightarrow 2x + 3y - 2 = 0$

$P(2,-3)$

<u>Gevraagd</u>:

Bepaal de vergelijking van b met $P \in b$ en $b \perp a$.

<u>Oplossing</u>:

Om de vergelijking van b op te stellen, moeten we nog eerst de richtingscoëfficiënt zoeken.

$$a \perp b$$
$$\Downarrow$$
$$rico(a).rico(b) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Downarrow$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .\ rico(b) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Downarrow$$
$$rico(b) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

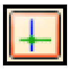
a' heeft als rico …………… en gaat door $P(2,-3)$, dus:

$$a' \leftrightarrow y - y_1 = m.(x - x_1)$$
$$a' \leftrightarrow y - .... = ...(x - ....)$$
$$a' \leftrightarrow .... = ...$$
$$a' \leftrightarrow .... = 0$$

<u>Wiris</u>:

- Teken in Wiris de rechte $a \leftrightarrow 2x+3y-2=0$ en het punt $P(2,-3)$.

```
a:=2x+3y-2=0
P:=punt(2,-3)
plot({a,P},{toon_naam=waar})
```

- Klik vervolgens in het menu "meetkunde" op 

- Het volgende verschijnt in je venster:

```
orthogonaal(rechte, punt)
```

- Vul de rechte en het punt in en voer uit.

```
a:=2x+3y-2=0
P:=punt(2,-3)
plot({a,P},{toon_naam=waar})
orthogonaal(a,P)
```

We tekenen de nieuwe rechte.

- Definieer de gevonden rechte als rechte a'.

- Teken de rechte b.

```
a:=2x+3y-2=0
P:=punt(2,-3)
plot({a,P},{toon_naam=waar})
b:=orthogonaal(a,P)
b
plot(b,{toon_naam=waar})
```

5.2.3. Middelloodlijn van een lijnstuk

Gegeven:

$A(5,2)$

$B(-3,0)$

Gevraagd:
Zoek de cartesiaanse vergelijking van de middelloodlijn d van $[AB]$.

Oplossing:

- We bepalen eerst het midden van $[AB]$.

$$co(M)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{.......+.......}{2},\frac{.......+.......}{2}\right)=(.......,.......)$$

- We zoeken de richtingscoëfficiënt van d.

$$rico(AB)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{......................}{......................}=....................$$

$$rico(d)=-\left(rico(AB)\right)^{-1}=......................$$

- We stellen de vergelijking op van de rechte d.

$$d \leftrightarrow y-y_1=m.(x-x_1)$$

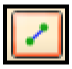
$$d \leftrightarrow y-...........=...........(x-..........)$$

$$d \leftrightarrow ....=..........................$$

$$d \leftrightarrow ....=0$$

Wiris:

- Geef de 2 punten in.
  $A(5,2)$
  $B(-3,0)$

- We definiëren het lijnstuk $[AB]$ en noemen deze a.
  Gebruik hiervoor in het menu "meetkunde" het volgende icoontje: 

- Teken de 2 punten en het lijnstuk.

```
A:=punt(5,2)
B:=punt(-3,0)
a:=lijnstuk(A,B)
plot({a,A,B},{toon_naam=waar})
```

- We zoeken het midden van $[AB]$ en noemen dit punt M.

```
M:=midden(A,B)
M
```

- We definiëren de rechte d, loodrecht op $[AB]$ en door het punt M.

- We tekenen de rechte d en het punt M.

```
A:=punt(5,2)
B:=punt(-3,0)
a:=lijnstuk(A,B)
plot({a,A,B},{toon_naam=waar})
M:=midden(A,B)
M
d:=orthogonaal(a,M)
d
plot(d,{toon_naam=waar})
```

- Klopt de rechte met je berekeningen op de vorige pagina?

  ....

5.2.4. Analytische bewijzen van meetkundige eigenschappen

De drie hoogtelijnen uit een driehoek zijn concurrent.

Gegeven:
$\triangle ABC$ met de hoogtelijnen a, b, c.

Te bewijzen:
De 3 hoogtelijnen zijn concurrent.

Bewijs met Wiris:

- We nemen 3 willekeurige punten A, B en C :

  $A(3,8)$

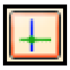
  $B(-4,6)$

  $C(1,-7)$

- Breng de punten in Wiris in en definieer de driehoek d . Gebruik hiervoor in het menu "meetkunde" het volgende icoontje: 

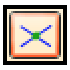
- We tekenen de punten en de driehoek. We kleuren de lijnen en de driehoek rood.

```
A:=punt(3,8)
B:=punt(-4,6)
C:=punt(1,-7)
d:=driehoek(A,B,C)
plot({A,B,C,d},{toon_naam=waar,kleur=rood,vul=waar})
```

- We definiëren en tekenen de hoogtelijnen. Gebruik hiervoor in het menu "meetkunde": 
  - a is de rechte die loodrecht staat op de rechte B, C en die door het punt C gaat.
  - b is de rechte …
  - c is de rechte …

```
a:=orthogonaal(rechte(B,C),A)
b:=orthogonaal(rechte(A,C),B)
c:=orthogonaal(rechte(A,B),C)
plot({a,b,c},{toon_naam=waar})
```

- We zoeken de snijpunten van de rechten a en b en a en c. Als deze punten hetzelfde zijn, klopt de stelling.

- Klik in het menu “meetkunde” op het icoontje 

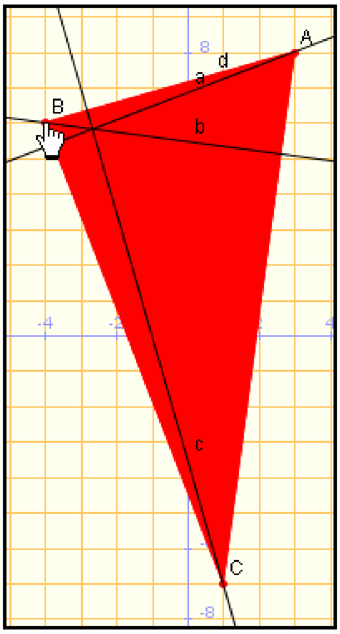
- Het volgende verschijnt:
```
doorsnede(figuur,figuur)
```

- Vul de rechte a en b in en doe hetzelfde voor a en c. Voer uit.
```
doorsnede(a,b)
doorsnede(a,c)
```

- Klopt de stelling?

- Verwijder “:” bij de punten A, B en C en voer opnieuw uit.
```
A=punt(3,8)
B=punt(−4,6)
C=punt(1,−7)
d:=driehoek(A,B,C)
plot({A,B,C,d},{toon_n
```

- Je kan nu de punten A,B en C verplaatsen. Zo kan je op verschillende manieren nagaan dat de stelling geldt.



5.2.5. Oefeningen

1. Welke van de volgende rechten zijn evenwijdig? Welke staan loodrecht op elkaar? Herschrijf de rechte eerst naar de vorm $y =$.

$$a \leftrightarrow 2x - 3y + 7 = 0$$
$$b \leftrightarrow 3x + 2y - 1 = 0$$
$$c \leftrightarrow x - y + 2 = 0$$
$$d \leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - 4$$
$$e \leftrightarrow 3x + 3y - 5 = 0$$
$$f \leftrightarrow y = x$$

Teken ter controle de rechten in Wiris.

2. Bepaal voor elk van de onderstaande opgaven de vergelijking van de rechte a als $P \in a$ en $a \perp d$. Zoek telkens ook de coördinaat van het snijpunt van a en d.

a) $d \leftrightarrow 2x-4y+1=0$ $\qquad P(3,1)$

....

....

....

....

....

....

....

b) $d \leftrightarrow y=2x-3$ $\qquad P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

....

....

....

....

....

....

....

c) $d \leftrightarrow -2y-4x+7=0$ $\qquad P(0,0)$

....

....

....

....

....

....

....

Controleer je resultaten in Wiris.

3. Bepaal de vergelijking van de middelloodlijn van $[AB]$ als

a) $A\left(3,\frac{1}{2}\right)$ en $B\left(\frac{1}{2},3\right)$

....

....

....

....

....

....

....

b) $A(2,-1)$ en $B(1,1)$

....

....

....

....

....

....

....

c) $A\left(\frac{2}{3},-1\right)$ en $B\left(\frac{1}{2},5\right)$

....

....

....

....

....

....

....

Controleer je resultaten in Wiris.

4. Gegeven: $A(-4,-2);B(0,6);C(4,3)$

Zoek de vergelijkingen van de middelloodlijnen van $\triangle ABC$ en bepaal de coördinaat van het snijpunt van de middelloodlijnen.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Maak deze oefening ook in Wiris.
Toon aan dat in verschillende driehoeken de middelloodlijnen elkaar snijden in één punt. Sla je oefening op.

5. Gegeven: $A(-2,-2);B(3,5);C(6,-6)$. Werk deze oefening uit met Wiris. Sla je bestand op en schrijf hier de antwoorden.

   - Stel de vergelijkingen op van de drie hoogtelijnen.

   ....

   ....

   ....

   ....

   - Bepaal de coördinaat van het snijpunt H van de drie hoogtelijnen.

   ....

   ....

   - Stel de vergelijkingen op van de drie middelloodlijnen.

   ....

   ....

   ....

   ....

   - Bepaal de coördinaat van het snijpunt M van de drie middelloodlijnen.

   ....

   ....

   - Stel de vergelijkingen op van de drie zwaartelijnen.

   ....

   ....

   ....

   ....

   - Bepaal de coördinaat van het zwaartepunt.

   ....

   ....

- Toon aan dat de drie punten H, M en Z) op één rechte liggen. (=de rechte van Euler). Geef de vergelijking van deze rechte.

....

....

....

....

- Toon aan dat |HZ|=2.|ZM|.

....

....

6. In een driehoek ABC trekt men de hoogtelijnen AD en BE $(D \in BC \text{ en } E \in AC)$.
   Het midden M van [AB] wordt met het midden N van [DE] verbonden. Bewijs dat $MN \perp DE$. Neem 3 willekeurige punten voor A, B en C.
   Werk uit in Wiris en sla je bestand op.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5.3. Afstand van een punt tot een rechte

5.3.1. Afstand van een punt tot een rechte analytisch bepalen

$m \leftrightarrow ax + by + c = 0$ en $A\left(x_1, y_1\right)$

$$d\left(A, m\right) = \frac{\left|ax_1 + by_1 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Voorbeeld:
Bepaal de afstand tussen $a \leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0$ tot $P\left(2,5\right)$

$$d\left(m, P\right) = \frac{\left|ax_1 + by_1 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right|}{\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Wiris:
- Geef de rechte en het punt in.

- Typ afstand(m,P) en voer uit.

```
m:=3x+4y-12=0
P:=punt(2,5)
afstand(m,P)
```

5.3.2. Normaalvergelijking van een rechte

Als $m \leftrightarrow ax+by+c=0$, dan is $\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$ een normaalvergelijking van m .

Voorbeeld:

$$m \leftrightarrow 3x+4y-7=0$$

$$m \overset{n}{\leftrightarrow} \frac{3x+4y-7}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$m \overset{n}{\leftrightarrow} \frac{3x+4y-7}{5}$$

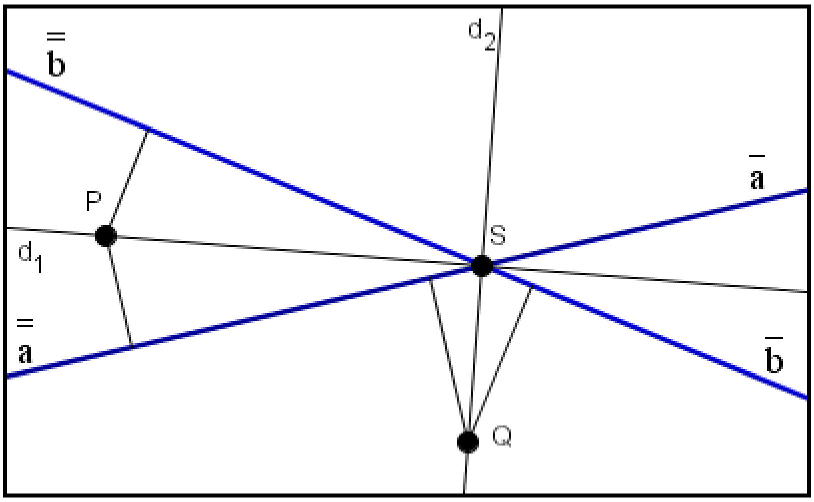
$$m \overset{n}{\leftrightarrow} \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{7}{5}$$

Als de vergelijking van een rechte als normaalvergelijking gegeven is, kan men zeer eenvoudig de afstand van een punt tot die rechte bepalen.

$co(A)=(-2,3) \qquad m \overset{n}{\leftrightarrow} \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{7}{5}$

$$d(A,m)=\frac{|3.(-2)+4.3-7|}{5}=\frac{1}{5}$$

5.3.3. Bissectrices van twee snijdende rechten



a en b bepalen de overstaande hoeken:

- $\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}$ en $\widehat{\bar{\bar{a}}\,\bar{\bar{b}}}$ met als gemeenschappelijke deellijn d_1
- $\widehat{\bar{a}\,\bar{\bar{b}}}$ en $\widehat{\bar{\bar{a}}\,\bar{b}}$ met als gemeenschappelijke deellijn d_2

<u>Er geldt dat</u>:

$P \in d_1 \Leftrightarrow d(P,a) = d(P,b)$

$Q \in d_2 \Leftrightarrow d(Q,a) = d(Q,b)$

<u>Er geldt eveneens dat</u>:

$X \in d_1 \cup d_2 \Leftrightarrow d(X,a) = d(X,b)$

<u>In woorden</u>:

De unie van bissectrices van een rechtenpaar is de verzameling van de punten waarvoor de afstanden tot beide rechten dezelfde zijn.

Voorbeeld:
Zoek de vergelijkingen van de deellijnen van a en b als:
$a \leftrightarrow 6x-8y+5=0$
$b \leftrightarrow -12x+5y-1=0$

Oplossing:
$a \overset{n}{\leftrightarrow} \frac{|6x-8y+5|}{10}=0$
$b \overset{n}{\leftrightarrow} \frac{|-12x+5y-1|}{13}=0$

$$P(x,y) \in d_1 \cup d_2$$
$$\Updownarrow$$
$$d(P,a)=d(P,b)$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{|6x-8y+5|}{10}=\frac{|-12x+5y-1|}{13}$$
$$\Updownarrow$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; of \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Updownarrow$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; of \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Updownarrow$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; of \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Merk op dat de bissectrices loodrecht op elkaar staan!!!

Wiris:

- Teken de rechten a en b in Wiris

```
a:=6x-8y+5=0
b:=-12x+5y-1=0
plot({a,b},{toon_naam=waar})
```

- Klik in het menu "meetkunde" op het icoontje 

- Dit verschijnt: `bissectrice(rechte, rechte)`

- Geef de bissectrice een naam, vul alles in en teken ze.

```
a:=6x-8y+5=0
b:=-12x+5y-1=0
plot({a,b},{toon_naam=waar})
c:=bissectrice(a,b)
c
plot(c)
```

- Zoals je opmerkt, geeft Wiris slechts één bissectrice. De andere moet je nog zoeken. Dit kan je doen door loodrecht op de eerste bissectrice, door het snijpunt van a en b, de 2^e^ bissectrice te tekenen. Doe maar.

5.3.4. Binnenbissectrices van een driehoek

In Wiris kun je op een gemakkelijke manier de binnenbissectrice van een driehoek opvragen.

Teken een driehoek in Wiris.

```
A:=punt(6,8)
B:=punt(−5,3)
C:=punt(9,−6)
d:=driehoek(A,B,C)
plot( {d,A,B,C},{toon_naam=waar})
```

Om de eerste binnenbissectrice te vinden doen we het volgende:
We vragen de eerste bissectrice van de driehoek, dan de tweede, …
en we tekenen ze.

```
a:=bissectrice(d,1)
b:=bissectrice(d,2)
c:=bissectrice(d,3)
plot({a,b,c},{toon_naam=waar,kleur=blauw})
```

Op deze manier heb je **altijd** de binnenbissectrice van een driehoek.

5.3.5. Oefeningen

1. Bepaal de afstand van de punten $A(2,1), B(0,0), C(-4,2)$ tot de rechte:

a) $a \leftrightarrow 4x - y + 2 = 0$

b) $b \leftrightarrow y = -3x$

c) $c \leftrightarrow \frac{x-1}{2} + \frac{y-3}{4} = 1$

Controleer je resultaten in Wiris.

2. Bepaal de vergelijkingen van de bissectrices van volgende rechtenparen:

a) $a \leftrightarrow 2x - y + 6 = 0$
$b \leftrightarrow 4x + 2y + 1 = 0$

b) $a \leftrightarrow 9x + 12y - 2 = 0$
$b \leftrightarrow -9x - 40y + 5 = 0$

Controleer je resultaten in Wiris.

3. Gegeven $\triangle ABC \quad A(1,10), B(17,-20), C(-11,1)$
Los deze oefening volledig in Wiris op. De antwoorden schrijf je op je blad.
Vergeet niet om je bestand te bewaren.

- Bepaal de vergelijkingen van de binnen- en buitenbissectrices van $\triangle ABC$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

- Toon aan dat de binnenbissectrices concurrent zijn. Geef het snijpunt.

....

....

- Toon aan dat 2 buitenbissectrices en één binnenbissectrice concurrent zijn. Geef het snijpunt.

....

....

- Bepaal de lengte van de hoogtelijnen in $\triangle ABC$.

....

....

....

....

....

....

- Bepaal de oppervlakte van $\triangle ABC$. Bereken dit eerst zelf!!

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Gebruik het commando `oppervlakte(□)` om te controleren.

4. Gegeven $\triangle ABC \quad A(0,5), B(4,-2), C(-3,-5)$
   Uit O laat men de loodlijnen OP, OQ en OR neer op AB, BC en CA.
   Toon aan: $|AP|^2+|BQ|^2+|CR|^2=|PB|^2+|QC|^2+|RA|^2$

   Los deze oefening volledig in Wiris op. Vergeet niet om je bestand te bewaren.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

5. Gegeven $\triangle ABC \quad A(-1,-1), B(1,5), C(7,-3)$

Door het midden M van [BC] tekent men een evenwijdige met de (binnen)bissectrice van Â.
Deze evenwijdige snijdt AB in N

Toon aan: $|BN| = \dfrac{|AB| + |AC|}{2}$

Reken dit eerst zelf uit. Controleer nadien met Wiris.

5.4. De Cirkel

5.4.1. De cartesiaanse vergelijking van een rechte

De cartesiaanse vergelijking van een cirkel met middelpunt $M\left(x_1, y_1\right)$ en straal r is:
$\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2=r^2$.

Voorbeeld:
Zoek de vergelijking van de cirkel met middelpunt $M\left(3,2\right)$ en straal 2.

....

....

....

....

....

Ligt $A\left(3,0\right)$ op deze cirkel?

....

....

Ligt $B\left(-1,5\right)$ op deze cirkel?

....

....

5.4.2. Algemene vergelijking van een cirkel

Als $a^2+b^2-c \geq 0$, dan is $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ de vergelijking van een cirkel met middelpunt $M\left(-a,-b\right)$ en straal $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

Voorbeelden:

Welke van de volgende vergelijkingen stellen een cirkel voor?

Vergelijking	Stelt de vergelijking een cirkel voor?
$x^2+y^2-3x-2y+3=0$	....
$x^2+y^2-3x+2y+13=0$	....
$2x^2+y^2-2x-16y+5=0$	....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

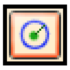
5.4.3. Een cirkel tekenen in Wiris

<u>Middelpunt en straal zijn gegeven</u>:

Middelpunt $M(3,2)$ en straal $r=4$

- Voer het middelpunt en de straal in Wiris in.

```
M:=punt(3,2)
r:=4
```

- Klik in het menu "meetkunde" op het volgende icoontje: 

- Geef de cirkel een naam, vul alles correct in en teken de cirkel.

```
c:=cirkel(middelpunt,straal)
c
plot(c)
```

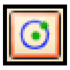
- Schrijf de vergelijking van de cirkel op.

  ....

<u>Middelpunt en een punt op de cirkel zijn gegeven</u>:

Middelpunt $M(3,2)$ punt op de cirkel $A(3,0)$

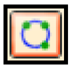
- Voer het middelpunt en het punt op de cirkel in Wiris in.

- Klik in het menu "meetkunde" op het volgende icoontje: 

- Geef de cirkel een naam, vul alles correct in en teken de cirkel.

```
c:=cirkel(middelpunt,punt)
c
plot(c)
```

<u>Drie punten op de cirkel zijn gegeven</u>:
$A(3,2), B(1,2), C(-2,-2)$

- Voer de 3 punten in Wiris in.
- Klik in het menu "meetkunde" op het volgende icoontje: 
- Geef de cirkel een naam, vul alles correct in en teken de cirkel.

```
c:=cirkel(punt,punt,punt)
c
plot(c)
```

<u>De vergelijking van de cirkel is gegeven</u>:
$c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$
$d \leftrightarrow (x-4)^2 + (y+1)^2 = 14$

- Voer de 2 vergelijkingen in Wiris in en teken ze.

```
c:=x²+y²-4x-6y+8=0
d:=(x-4)²+(y+1)²=14
plot({c,d})
```

5.4.4. Straal en middelpunt opvragen in Wiris

<u>Gegeven:</u>
$c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$

- Voer de vergelijking in Wiris in en teken de cirkel.
- Straal en middelpunt kan je makkelijk opvragen met volgend commando:

```
c:=x²+y²-4x-6y+8=0
plot(c)
straal(c)
middelpunt(c)
```

<u>Opmerking</u>:
Je **moet** eerst de cirkel tekenen voor je de straal en het middelpunt opvraagt.

5.4.5. Onderlinge ligging van een cirkel en een rechte

Om eventuele snijpunten van een rechte en een cirkel te bepalen, zoeken we punten waarvan de coördinaten zowel voldoen aan de vergelijking van de cirkel als aan de vergelijking van de rechte. We lossen een stelsel op dat bepaald wordt door beide vergelijkingen.

<u>Voorbeelden</u>:
Zoek de eventuele snijpunten van de rechte $d \leftrightarrow 4x + y - 2 = 0$ en de cirkel $c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 16y + 3x + 62 = 0$.

$$\begin{cases} 4x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 16y + 3x + 62 = 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

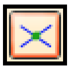
Er zijn drie mogelijkheden:
- er zijn twee verschillende snijpunten. De rechte snijdt de cirkel.
- er zijn twee samenvallende snijpunten. De rechte is een raaklijn.
- er zijn geen snijpunten. De rechte ligt volledig buiten de cirkel.

5.4.6. Snijpunten bepalen met Wiris

We zoeken de snijpunten van de rechte $d \leftrightarrow 4x + y - 2 = 0$ met de cirkel $c \leftrightarrow x^2 + y^2 - 16y + 3x + 62 = 0$

- Voer de rechte d en cirkel c in Wiris in.

```
d:=4x+y-2=0
c:=x^2+y^2-16y+3x+62=0
```

- Klik in het menu meetkunde op het icoontje: 

- Vul alles correct in en voer uit.

```
doorsnede(figuur,figuur)
```

Opmerking:
Via deze manier kan je ook de snijpunten zoeken van 2 cirkels.

5.4.7. Onderlinge ligging van twee cirkels

Om de eventuele snijpunten van twee cirkels te bepalen, lossen we het stelsel op dat bepaald wordt door de vergelijkingen van beide cirkels.

Voorbeelden:

Zoek de eventuele snijpunten van c en d als:

$c_1 \leftrightarrow x^2 + y^2 + 3y - 3x - 52 = 0$

$c_2 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 2x - 32 = 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3y - 3x - 52 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y + 2x - 32 = 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

De cirkels c_1 en c_2 kunnen op de volgende manieren ten opzichte van elkaar liggen:

- Volledig binnen elkaar liggend
- Volledig buiten elkaar liggend
- Snijdend
- Inwendig rakend
- Uitwendig rakend
- Samenvallend
- Concentrisch

Onderzoek met Wiris de ligging van de volgende cirkels. Zeg ook telkens iets over de afstand tussen de 2 middelpunten en de stralen. M_1 en M_2 zijn de respectievelijke middelpunten en r_1 en r_2 de stralen.

- $|M_1M_2| > r_1 + r_2$
- $|M_1M_2| = r_1 + r_2$
- $|r_1 - r_2| < |M_1M_2| < r_1 + r_2$
- $|M_1M_2| = |r_1 - r_2|$
- $|M_1M_2| < |r_1 - r_2|$
- $|M_1M_2| = 0 \quad \text{en} \quad r_1 \neq r_2$
- $|M_1M_2| = 0 \quad \text{en} \quad r_1 = r_2$

- Onderzoek de ligging van de cirkels c_1 en c_2. Het kadertje kan hulp bieden.

  $c_1 \leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$

  $c_2 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....

```
c1 :=x^2+y^2+4x-2y+1=0
c2 :=x^2+y^2-4x+2y+4=0
plot({c1,c2})
M1 :=middelpunt(c1)
M2 :=middelpunt(c2)
M1
M2
afstand(M1,M2)
r1 :=straal(c1)
r2 :=straal(c2)
r1
r2
r1+r2
|r2-r1|
```

- Onderzoek de ligging van de cirkels c_1 en c_2.

  $c_1 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 8 = 0$

  $c_2 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 26 = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

- Onderzoek de ligging van de cirkels c_1 en c_2.

  $c_1 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$

  $c_2 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

- Onderzoek de ligging van de cirkels c_1 en c_2.

  $c_1 \leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 6y - 27 = 0$

  $c_2 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

- Onderzoek de ligging van de cirkels c_1 en c_2.

  $c_1 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x - 6y + 9 = 0$

  $c_2 \leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 24x - 12y + 18 = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

- Onderzoek de ligging van de cirkels c_1 en c_2.

  $c_1 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

  $c_2 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

- Onderzoek de ligging van de cirkels c_1 en c_2.

  $c_1 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$

  $c_2 \leftrightarrow x^2 + y^2 + 10x - 18y - 38 = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Controleer je resultaten in Wiris. Open het bestand onderlinge ligging van 2 cirkels en volg de instructies.

Vervolledig de tabel:

De onderlinge liggen van twee cirkels c_1 en c_2 geven de volgende mogelijkheden:

Volledig binnen elkaar liggend	....
....	$\lvert M_1M_2 \rvert > r_1 + r_2$
....	$\lvert M_1M_2 \rvert = 0 \quad \text{en} \quad r_1 = r_2$
Inwendig rakend	....
Snijdend	....
....	$\lvert M_1M_2 \rvert = r_1 + r_2$
Concentrisch	....

5.4.8. Oefeningen

Los al deze oefeningen op met Wiris.

1. Gegeven:

   $A(0,5)$

   $B(-6,0)$

   $C(6,0)$

   Gevraagd:

   - de cirkel c die door de punten A, B en C gaat.
   - de straal.
   - het middelpunt.
   - toon aan dat de middelloodlijn op de koorde $[AB]$ door het middelpunt van de cirkel gaat.

   Oplossingen:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. <u>Gegeven</u>:

$c \leftrightarrow x^2 + y^2 = 49$

$A(0,7); B(-7,0); C(7,0); D(0,-7)$

$A, B, C, D \in c$

M is het middelpunt van de cirkel

$[MP]$ is het apothema van de koorde $[AB]$

$[MQ]$ is het apothema van de koorde $[CD]$

<u>Gevraagd</u>:

- het middelpunt van de cirkel c.
- Bereken de lengte van de koorden $[AB]$ en $[CD]$.
- Toon aan dat de apothema's $[MP]$ en $[MQ]$ even lang zijn.

<u>Oplossingen</u>:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. <u>Gegeven</u>:

De driehoek ABC wordt bepaald door:

$a \leftrightarrow -x + y + 7 = 0$

$b \leftrightarrow 3x + 5y + 3 = 0$

$c \leftrightarrow 11x + 5y + 51 = 0$

<u>Gevraagd</u>:

- Bepaal de vergelijking van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC.

<u>Oplossingen</u>:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Gegeven:

$a \leftrightarrow 163x + 191y - 1444 = 0$

$c \leftrightarrow \left(x + \frac{25}{46}\right)^2 + \left(y - \frac{39}{46}\right)^2 = \frac{31525}{1058}$

M is het middelpunt van de cirkel c

de rechte a raakt de cirkel c in het punt A

Gevraagd:

- het middelpunt.
- het raakpunt.
- toon aan dat $MA \perp a$.

Oplossingen: